CONDORCET, KEUZESTRESS, EN ARROW

Een kennismaking met Social Choice Theory

Hoe kunnen we als groep een democratische keuze maken? Is er zoiets als “de mening van de groep” en hoe kunnen we die bepalen? Welke methodes kunnen we hiervoor precies hanteren, en geven geven ze altijd de gewenste uitkomst? Kortom: wat zijn de logische mogelijkheden en beperkingen van democratische keuzes?

In deze tekst maak je kennis met *Social Choice Theory* (afgekort als SCT). SCT is een onderzoeksgebied op het raakvlak van politieke filosofie en wiskunde. De vragen die men hierbij stelt gaan over hoe mensen samen, als groep, keuzes *kunnen* maken. Dit staat in contrast met (empirische) politieke wetenschappen, waarin men onderzoekt hoe groepen van mensen *in de realiteit keuzes maken*, maar ook met (theoretische) politieke filosofie, waarin men voornamelijk argumenteert hoe groepen keuzes *zouden moeten* maken, opdat ze democratisch zouden zijn.

SCT is belangrijk voor onze opvattingen en theorieën over democratie. Als we willen uitleggen waarom een bepaalde keuze wel of niet democratisch is, of als we willen kiezen uit verschillende zulke methoden, dan is het belangrijk dat we weten wat we van die methoden mogen verwachten, theoretisch gezien. SCT is ook toepasbaar in de praktijk. Denk hierbij bijvoorbeeld aan een leerlingenraad die moet kiezen welke online tool ze gaat gebruiken om vergaderingen te plannen, de agenda van die vergadering vast te leggen, of te beslissen hoe ze hun budget gaan besteden. Bij elk van die keuzes kunnen inzichten uit SCT nuttig zijn.

De bedoeling van deze tekst is niet om een volledig overzicht te geven van deze discipline, maar wel om een aantal centrale problemen te schetsen. Hiermee krijg je een idee van de centrale vraagstukken en ideeën waardoor SCT gedreven wordt, en wat er verrassend aan is. We vertrekken hierbij van concrete voorbeeld, en bouwen stelselmatig op.

Doorheen de tekst zitten oefeningen die tot doel hebben je te helpen of je de tekst tot dusver begrepen hebt. Alle oefening zijn genummerd; hun oplossing kan je op het einde van deze cursustekst in afdeling 7 terugvinden. Oefeningen met een asterisk (*) zijn verdiepingsoefeningen voor leerlingen met een eerder wiskundige achtergrond.

Daarnaast zijn er ook vragen “ter discussie”, dus vragen waar diverse goede antwoorden op mogelijk zijn. Deze vragen en je antwoorden erop kan je met medeleerlingen of de leerkracht bespreken.

1. De Paradox van Condorcet

Stel je voor dat Alicja, Bouchra, en Cas moeten beslissen hoe ze hun vrijdagavond gaan besteden. Ze hebben slechts twee opties: ofwel spelen ze op de Xbox van Bouchra, ofwel gaan ze naar café Yolo. Bovendien hebben de drie elk een sterk uitgesproken voorkeur voor hetzij Yolo, hetzij de Xbox. Dan zijn er maar een klein aantal mogelijke gevallen die we kunnen onderscheiden:

- Geval 1: Ze verkiezen alle drie Yolo boven de Xbox. In dat geval is de beslissing snel gemaakt: ze gaan alle drie naar Yolo.
- Geval 2: Ze verkiezen alle drie de Xbox boven op café gaan. Dan wordt het de Xbox.
- Geval 3: Twee van de drie verkiezen de Xbox boven Yolo. (Bijvoorbeeld: Alicja en Cas verkiezen de Xbox boven Yolo, Bouchra verkiest dan weer Yolo boven de Xbox.) Als ze allen bij hun standpunt blijven, dan zit er weinig anders op dan dat de meerderheid het haalt: ze spelen met de Xbox.
- Geval 4: Twee van de drie verkiezen Yolo boven de Xbox. Opnieuw zal dan de meerderheid het halen en gaan ze dit keer naar Yolo.

Merk op dat we er tot dusver van uitgingen dat Alicja, Bouchra, en Cas telkens een duidelijke voorkeur hebben. In het echte leven is het best mogelijk dat één of meer personen onverschillig is: het kan bv. zijn dat het voor Cas eigenlijk niet uitmaakt. In wat volgt focussen we op het geval waarin iedereen een duidelijke voorkeur heeft, maar veel van wat we zullen uitleggen geldt net zozeer voor gevallen waarin, voor sommige van de betrokken personen, sommige opties “even goed” zijn als andere.

In de bovengenoemde gevallen gebruikten we telkens een welbepaalde regel, om te bepalen of de groep optie X (Xbox) boven optie Y (Yolo) verkiest. Deze regel heet “paarsgewijze meerderheid”:

> *Paarsgewijze meerderheid*: X is beter dan Y (voor de groep) als de meerderheid van de leden van de groep X boven Y verkiest; in het andere geval is Y beter dan X.

We gingen er dus eigenlijk van uit dat, als we deze regel correct toepassen, we altijd een democratische beslissing nemen.[1] Zolang er slechts twee opties zijn lijkt dat ook vrij oncontroversiëel: tenzij er nog alternatieven zijn, of tenzij er specifieke redenen zijn om de voorkeuren van bepaalde personen meer te laten doorwegen, kan men maar beter de meerderheid laten beslissen.

Als er drie opties zijn, dan brengt paarsgewijze meerderheid echter problemen met zich mee. Stel bijvoorbeeld dat er een derde opties is: ze kunnen samen naar het Zebrapark gaan en daar iets drinken. Laat ons, om het een beetje overzichtelijk te houden, A, B, en C gebruiken als afkorting van Alicja, Bouchra, respectievelijk Cas, en laat ons X, Y, Z gebruiken voor de drie opties. Stel nu dat elk van onze drie personen een ranking opstelt,

[1] Een bekend resultaat van Condorcet dat we in deze tekst niet behandelen, nl. het *Condorcet Jury Theorema*, gaat precies over het kiezen uit twee opties, waarbij geldt dat slechts één van beide opties objectief gezien “correct is”. Het theorema zegt ruwweg dat in dit soort gevallen, naarmate een groep groter wordt, de groepsbeslissing volgens paarsgewijze meerderheid met toenemende waarschijnlijkheid correct is. Zie List (2013) en voor meer informatie over dit theorema, en Estlund (1994) voor een vrij toegankelijk bewijs ervan.

van “leukste” naar “minst leuke” besteding van de avond, en dat hun ranking er als volgt uitziet:

A: <Y, X, Z>

B: <X, Z, Y>

C: <Z, Y, X>

Dit moet je als volgt lezen: Alicja verkiest Yolo boven de Xbox en het Zebrapark, en als het dan toch niet Yolo kan zijn, heeft Alicja nog liever de Xbox dan het Zebrapark. Hieruit volgt ook dat Alicja Yolo verkiest boven het Zebrapark. Cas verkiest ook Yolo boven de Xbox, maar gaat liefst van al naar het Zebrapark.

Oefening 1

1a. Formuleer in je eigen woorden wat de voorkeuren zijn van Bouchra, gegeven bovenstaande “afkortingen”.

1b. Stel dat Alicja een andere voorkeur heeft, namelijk: ze verkiest het Zebrapark boven de Xbox, en de Xbox boven Yolo. Hoe stel je dan de voorkeur van Alicja afgekort voor?

Wat moet de groep nu kiezen? Een éénvoudige manier om dit te bepalen is er niet. Merk op dat geen van de drie opties, X, Y, of Z, door een meerderheid van de personen op nummer 1 geplaatst wordt. Laat ons daarom onze regel van hierboven toepassen: paarsgewijze meerderheid. Dan krijgen we het volgende resultaat:

(1) Y is beter dan X (voor de groep). Immers, zowel A als C verkiezen Y boven X; alleen B verkiest X boven Y. Er is dus een meerderheid die Y boven X verkiest.
(2) X is beter dan Z (voor de groep), want zowel A als B verkiezen X boven Z
(3) Z is beter dan Y (voor de groep), want zowel B als C verkiezen Z boven Y

Met andere woorden, de “groepsranking” ziet er als volgt uit:

G: <… Z, Y, X, Z, Y, X, Z, Y, X, …>

De groep lijkt dus in cirkeltjes te draaien. Meer nog: voor elk van de opties X, Y, en Z, is het zo dat er telkens een meerderheid is die liever één van de andere opties heeft. Concreet:

Probleem met X: Alicja en Cas verkiezen allebei Y boven X

Probleem met Y: Bouchra en Cas verkiezen allebei Z boven Y

Probleem met Z: Alicja en Bouchra verkiezen allebei X boven Z

Dus, wat de groep ook kiest, er zal altijd een andere optie zijn zodat een meerderheid die optie verkiest.

Markies De Condorcet

Dit probleem heet de paradox van Condorcet. Het werd voor het eerst beschreven door Markies De Condorcet (1743-1794, Frankrijk). Een *paradox* is hier een redenering die, vertrekkende van aannemelijke vooronderstellingen, en aan de hand van aannemelijke denkstappen, tot een absurde conclusie leidt. De aannemelijke vooronderstellingen zijn in dit geval enerzijds de specifieke voorkeuren van de personen A, B, en C, en anderzijds de regel waarmee we bepalen wat de groep kiest. De absurde conclusie is dat de groep niks (of alles) kan kiezen, en dat wat de groep ook doet, er altijd een meerderheid zal zijn die het liever anders had gezien.

Ter discussie: Wat zou jij doen als je je in de situatie bevindt van Alicja, Bouchra, en Cas? Hoe zou je de keuze kunnen maken?

2. Andere stemregels

De paradox van Condorcet is belangrijk in diverse opzichten. In de eerste plaats toont deze paradox aan dat een éénvoudige regel, die goed werkt in sommige gevallen (bv. wanneer er slechts uit twee opties moet gekozen worden), heel vreemde gevolgen kan geven in iets complexere gevallen. Het is dus belangrijk om zulke regels met de nodige voorzichtigheid en precisie te onderzoeken. Een ander belangrijk inzicht dat volgt uit de paradox van Condorcet, is dat er soms situaties kunnen ontstaan waarin het onvermijdelijk is dat men de voorkeur van een meerderheid van de groepsleden zal moeten negeren.

Eén manier om naar de paradox van Condorcet te kijken is als een argument om andere stemregels dan paarsgewijze meerderheid te gebruiken, zodat men niet tot zulke cirkels van voorkeuren komt. In wat volgt geven we drie voorbeelden van zulke andere "stemregels".[2]

- <u>*Paarsgewijze tweederde meerderheid*</u>: De groep verkiest X boven Y als twee derde van de individuen in de groep X boven Y verkiest. Is dat niet het geval, dan zijn X en Y even goed voor de groep. Deze regel lijkt erg op paarsgewijze meerderheid, omdat ze ook de voorkeur van de groep bepaalt per paar van opties, en vervolgens pas een volledige ranking voor de groep opstelt. Hierdoor is ze echter ook ten prooi aan de paradox van Condorcet, zoals je gemakkelijk kan zien aan de hand van vorige afdeling.

- <u>*Eenvoudige meerderheid*</u>: Bij deze regel kijken we enkel naar de opties die elk lid van de groep op nummer 1 van zijn of haar ranking zet. We tellen dan hoe vaak een optie voorkomt op de eerste plaats van een ranking. De optie die het vaakst op plaats 1 komt, heeft de voorkeur van de groep. De optie die het tweede vaakst op plaats 1 voorkomt, komt tweede voor de groep. Etc. Als twee opties even vaak op nummer 1 voorkomen, dan zijn ze even goed voor de groep.

[2] Een precieze en algemeen toepasbare bepaling van het begrip "stemregel" volgt in Afdeling 3. Hier beperken we ons tot concrete voorbeelden.

- *Unanimiteit*: de groep verkiest X boven Y als iedereen in de groep X boven Y verkiest. Als dat niet het geval is, zijn X en Y even goed voor de groep. Deze regel kan je zien als een extreme vorm van “paarsgewijze meerderheid”, waarbij je alleen een meerderheid volgt als die samenvalt met de hele groep. Het nadeel hiervan is dat de groep vaak onbeslist zal zijn tussen twee alternatieven.

- *Borda regel*: deze regel vergt wat meer uitleg. Stel dat er *k* verschillende opties zijn waaruit gekozen moet worden. Elke optie krijgt een score op basis van de plaats van die optie in elk van de rankings van de groepsleden. Preciezer: beschouw een optie X.
    - Neem het aantal keer dat X op de hoogste plaats voorkomt in een ranking. Vermenigvuldig dit met k-1.
    - Neem het aantal keer dat X op de tweede plaats voorkomt in een ranking. Vermenigvuldig dit met k-2.
    - Neem het aantal keer dat X op de derde plaats voorkomt in een ranking. Vermenigvuldig dit met k-3.

    …

    - Neem het aantal keer dat X op de voorlaatste plaats voorkomt in een ranking. Vermenigvuldig dit met 1.

  Tel vervolgens alle getallen die je bekomen hebt op. Die som heet de *Borda score* van optie X, naar Jean-Charles de Borda (1733-1799), een tijdgenoot van de Condorcet. Tenslotte vergelijk je de Borda score van alle opties en bepaal je zo een ranking: hoe hoger de Borda score, hoe hoger de optie staat in de ranking. (Als twee opties dezelfde Borda score hebben, zet de groep ze op gelijke hoogte.)

De Borda regel lijkt wat complex, maar eens je doorhebt hoe hij werkt zie je dat dit een ingenieuze manier is rekening te houden met de informatie die in de rankings gegeven heeft. In vele gevallen zal deze regel ook dezelfde uitkomst geven als paarsgewijze meerderheid. Echter, in sommige gevallen zijn ze wezenlijk verschillend. Men kan bovendien aantonen dat de Borda regel nooit tot cirkels van groepsvoorkeuren leidt zoals paarsgewijze meerderheid dat doet.

Oefening 2

Pas de stemregels *paarsgewijze twee derde meerderheid, eenvoudige meerderheid*, *unanimiteit*, en *Borda regel* toe op het voorbeeld uit Afdeling 1:

A: <Y, X, Z>

B: <X, Z, Y>

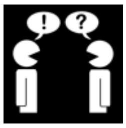
C: <Z, Y, X>

Beantwoord hierbij volgende vragen:

2a. Hoe ziet de groepsranking er uit, volgens deze alternatieve stemregel?

2b. Als je de alternatieve stemregel toepast, vertoont de groepsranking dan ook cirkels?

2c. Zijn er eventueel andere problemen die je krijgt met de alternatieve stemregel?



Ter discussie: Welke van de stemregels vind jij het meest democratisch? Waarom?

Welke stemregel is nu de juiste? Stel dat we bijvoorbeeld de Borda regel gebruiken, kunnen er dan geen andere problemen rijzen? Hoe zijn we zeker dat er geen andere paradoxen or rariteiten optreden?

Laat ons de laatste vraag illustreren met een voorbeeld. Uit het voorgaande kan men misschien concluderen dat de Borda regel altijd minstens even goed is als paarsgewijze meerderheid, en soms beter. Beschouw echter de volgende twee situaties:

Situatie 1: keuze uit X en Y	**Situatie 2: keuze uit X, Y, en Z**
Rankings: A: <X, Y> B: <X, Y> C: <X, Y> D: <Y, X> E: <Y, X>	Rankings: A: <Z, X, Y> B: <Z, X, Y> C: <Z, X, Y> D: <Y, Z, X> E: <Y, Z, X>
Borda scores: X = 3, Y = 2	Borda scores: X = 3, Y = 4, Z = 8
Groepsranking volgens Borda regel: <X, Y>	Groepsranking volgens Borda regel: <Z, Y, X>

In zowel situatie 1 als in situatie 2 zien we dat de meeste groepsleden (3 van de 5) X boven Y verkiezen. In situatie 1 leidt dat tot de conclusie dat ook de groep X boven Y verkiest. Echter, in situatie 2 is het net omgekeerd. Een ogenschijnlijk irrelevante derde optie, namelijk Z, zorgt ervoor dat plots Y boven X verkozen wordt door de groep. Dit is op zijn minst opmerkelijk te noemen, en volgens sommigen zelfs problematisch.

Kunnen we dan zowel de paradox als bovenstaand probleem vermijden, en toch op een democratische manier de voorkeuren van de groep bepalen? Dit soort vragen is verre van eenvoudig. Om ze te beantwoorden heeft men een systematische, algemene studie van dit soort stemregels nodig, om te zien welke eigenschappen ze hebben, welke voor- en nadelen ze hebben, en aan welke principes ze voldoen. Sommige zulke regels zullen bijvoorbeeld altijd rekening houden met wat de meerderheid zegt, terwijl andere regels er altijd toe leiden dat de "groepsranking" geen cirkels bevat. Tegelijk kan men ook onderzoeken in welke omstandigheden éénvoudige principes (zoals paarsgewijze meerderheid of de andere regels die we hieronder bespreken) *wel* tot een groepsranking zonder cirkels leiden. Dit is bijvoorbeeld het geval wanneer er slechts twee alternatieven zijn, of wanneer er reeds enige mate van overeenstemming is tussen de voorkeuren van de verschillende groepsleden.[3]

[3] Black toonde aan dat, wanneer de rankings van de individuen in een groep aan een bepaalde formele vereiste genaamd "single-peakedness" voldoen, paarsgewijze meerderheid altijd een "normale" groepsranking oplevert (1948).

3. De verzameling van stemregels

Kenneth J. Arrow

© *Stanford University*

De eigenlijke geboorte van Social Choice Theory wordt meestal toegeschreven aan Kenneth Arrow met zijn baanbrekende werk *Social Choice and Individual Values* (Arrow, 1951). Vóór Arrow was men al sinds de 18^e eeuw bezig met het bestuderen van concrete stemregels, zoals de voorbeelden die we in de vorige afdeling bespraken. Vaak probeerde men daarbij te argumenteren waarom de ene regel beter is dan de andere, of probeerde men uit te zoeken in welke omstandigheden diverse regels op hetzelfde neerkomen. **Arrow daarentegen vroeg zich af aan welke *criteria* stemregels moeten voldoen, om als democratisch te gelden**. **Hij bestudeerde dus niet één of meer specifieke stemregels, maar bestudeerde de *verzameling van alle mogelijke stemregels*.** Dit bracht hem tot een zeer belangwekkend en invloedrijk resultaat, dat nu “Arrow’s Theorem” genoemd wordt.[4]

Om Arrows theorema uit te leggen, moeten we enkele stappen zetten. Eerst bepalen we de begrippen “ranking-profiel” en “stemregel” in exacte termen (afdelingen 3.1 en 3.2). In de volgende afdeling tonen we dat je bepaalde criteria nodig hebt om goede van minder goede stemregels te onderscheiden. Door deze ingrediënten te combineren, komen we uit bij Arrows theorema.

Het Universum van Ranking-profielen

Beschouw een keuze uit een eindig aantal verschillende opties: X, Y, ... In ons voorbeeld uit afdeling 1 waren de opties verschillende manieren om een vrijdagavond in te vullen. Opties kunnen vanalles zijn: data waarop we een festival willen organiseren, activiteiten voor een sportnamiddag, reisbestemmingen voor een eindreis, of goede doelen waar je gezamenlijk een deel van je zakgeld aan wil besteden. Het enige wat hier telt is dat de opties vooraf duidelijk bepaald zijn, en dat je als groep een ranking moet opstellen.

Oefening 3

3a. Zoek zelf een ander voorbeeld van een situatie waarin je uit 3 of meer opties moet kiezen.

3b. Benoem de opties, kort ze af (met letters of getallen), en stel zelf één ranking op van die opties, van “beter” naar “slechter”.

[4] Een “theorema” is een centrale stelling of bewering die men in de wiskunde (of aan de hand van wiskundige methodes) aantoont. Klassieke voorbeelden is de *Stelling van Pythagoras* of de twee *Onvolledigheidstheorema’s van Gödel*.

Stel dat we ons, zoals in Afdeling 1, beperken tot gevallen waarin ieder individu een volledige ranking van de opties opstelt (waarbij elke optie slechts één plaats inneemt, en er nooit twee opties zijn die "even goed" zijn). Zo hadden we bijvoorbeeld volgende ranking voor Alicja in Afdeling 1:

A: <Y, X, Z>

Als je voor elk individu een ranking vastlegt, dan bekom je een *ranking-profiel*.[5] Een ranking-profiel geeft dus, voor elk lid van de groep, aan wat de voorkeuren van dat lid zijn. In ons voorbeeld uit Afdeling 1 was dit het ranking-profiel dat tot de paradox van Condorcet leidt:

A: <Y, X, Z>

B: <X, Z, Y>

C: <Z, Y, X>

Oefening 4

4a. Stel dat er 4 keuze-opties zijn, X, Y, Z, en U, en dat de groep uit 3 personen bestaat. Maak zelf drie ranking-profielen voor dit voorbeeld.

4b. Is het moeilijk om, eens je één ranking-profiel hebt, andere ranking-profielen te maken? Waarom (niet)?

Oefening 5*

5a. Hoeveel mogelijke <u>rankings</u> zijn er als je 2 alternatieven hebt?

5b. Hoeveel mogelijke <u>rankings</u> zijn er als je 3 alternatieven hebt?

5c. Hoeveel mogelijke <u>rankings</u> zijn er als je 4 alternatieven hebt?

5d. Hoeveel mogelijke <u>rankings</u> zijn er als je n alternatieven hebt, voor een natuurlijk getal n? Tip: Denk hierbij terug aan de notie "faculteit" uit de rekenkunde.

5e. Stel dat je weet dat er k mogelijke rankings zijn en dat een groep bestaat uit m individuen. Hoeveel mogelijke <u>ranking-profielen</u> zijn er dan? Tip: lees even verder onder deze oefening, en kijk of je het antwoord kan afleiden uit de formule die daar gegeven wordt.

Merk op dat, naarmate er meer opties X, Y, … zijn, en naarmate er meer leden van de groep zijn, het aantal mogelijke rankings en dus ook het aantal mogelijke ranking-profielen sterk toeneemt. Als je bijvoorbeeld moet kiezen uit 5 opties, en de groep bestaat uit 7 leden, dan wordt het aantal mogelijke ranking-profielen gegeven door volgende berekening:

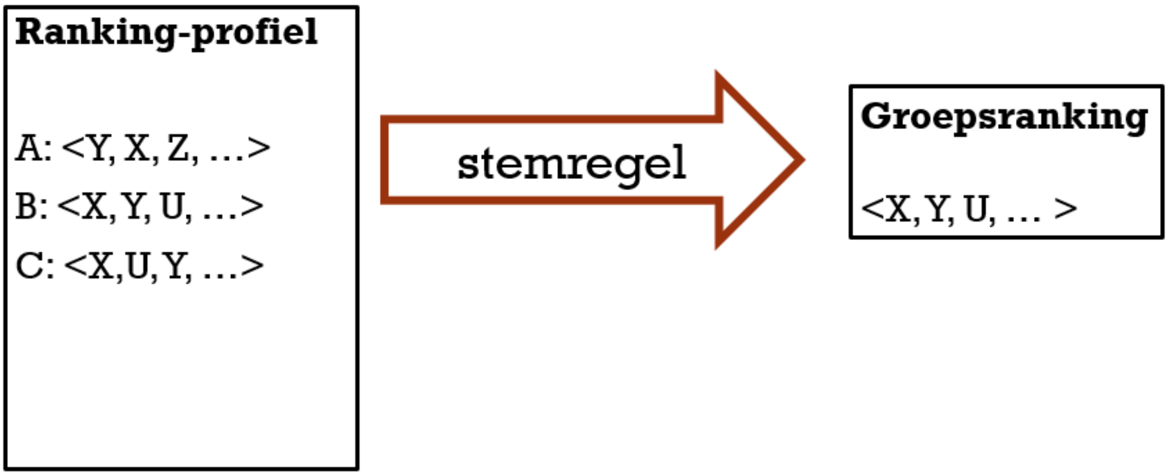
[5] In de vakliteratuur (die Engelstalig is) gebruikt men hier de term "preference profile", wat letterlijk vertaald zou worden als "preferentie-profiel".

$$(5 \times 4 \times 3 \times 2) \times 7 = 420$$

Om te bepalen wat alle mogelijke ranking-profielen zijn moet je dus eerst vastleggen (a) wat de opties zijn en (b) uit welke individuen de groep bestaat. Aan de hand van (a) kan je bepalen hoeveel mogelijke rankings er zijn. Via (b) kan je daarna afleiden hoeveel mogelijke ranking-profielen er zijn.

Stemregels: een exacte bepaling

We kunnen nu een exactere bepaling geven van het begrip “stemregel”. Een stemregel bepaalt voor elk ranking-profiel P wat de overeenkomstige “groepsranking” G is.[6] Alle regels die we in afdelingen 1 en 2 bespraken, vallen onder deze definitie van “stemregel”: paarsgewijze meerderheid, paarsgewijze tweederde meerderheid, de unanimiteitsregel, en de Borda regel. Volgende figuur vormt een schematische weergave van het begrip “stemregel”:



Figuur 1: schematische weergave van de definitie van een stemregel

Oefening 6*

6a. Stel dat er in totaal *n* mogelijke ranking-profielen zijn, en *m* mogelijke rankings. Hoeveel stemregels bestaan er dan, strikt genomen?

6b. Gebruik je resultaten uit oefening 5 en oefening 6a om te bepalen hoeveel stemregels er bestaan voor een situatie waarin 5 personen een ranking opstellen van 4 alternatieven.

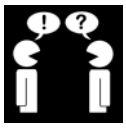
Er zijn dus heel veel mogelijke stemregels. Niet al die regels zijn echter even aannemelijk of eerlijk. Zo vallen ook volgende voorbeelden onder onze definitie van “stemregel” (voor een groep die individu A als lid bevat, en voor opties X, Y, en Z):

- *Dictatuur van A*: De groepsranking is altijd gelijk aan de ranking van individu A, ongeacht de voorkeuren van de anderen

[6] In wiskundige termen is een stemregel een functie die elk ranking-profiel afbeeldt op een ranking.

- *Vaste voorkeur voor X over Y over Z*: De groepsranking is altijd <X,Y,Z>, ongeacht de individuele voorkeuren

De eerst van deze twee regels komt er eigenlijk op neer dat A een dictator is: de voorkeuren van A bepalen volledig wat de voorkeuren van de groep zijn. De tweede regel is ook problematisch, aangezien deze regel helemaal geen rekening houdt met wat de individuen in de groep willen. Zelfs als men unaniem Y verkiest boven X, zal de regel “vaste voorkeur” nog steeds als uitkomst geven dat de groep X boven Y verkiest. Toch zijn dit ook stemregels volgens onze algemene definitie.



Ter discussie:
- Hoe zou jij zelf bepalen of een stemregel al dan niet democratisch is?
- Wat zijn eisen die je zou stellen aan een stemregel?
- Kan je één of meer stemregels bedenken die aan al die eisen voldoen?
- Hoe zou je uit verschillende stemregels moeten kiezen?

4. Criteria voor stemregels en Arrows theorema

In afdeling 3 zagen we dat een ranking-profiel voor elk individu in de groep vastlegt hoe dat individu de verschillende opties zou ordenen, van “beter” naar “slechter”. Stemregels werden omschreven als methodes om, gegeven zo’n ranking-profiel, te bepalen wat de ranking van de groep is. We zagen daarbij dat er een zeer groot aantal mogelijke stemregels zijn, maar dat ze niet allen even rationeel of democratisch zijn.

Arrow vroeg zich daarom af aan welke *criteria* een stemregel moet voldoen, om als democratisch en rationeel te gelden. In wat volgt focussen we op vijf zulke criteria, die door Arrow zelf werden vooropgesteld. We geven ze hieronder één voor één, en illustreren ze telkens aan de hand van ons café-voorbeeld.

- <u>Consistentie</u>: de groepsranking is een ranking waarin alle opties precies 1 positie innemen (dus zonder cirkels of herhalingen zoals in de Condorcet paradox). Het is hierbij wel toegelaten dat sommige opties op gelijke hoogte staan.
    - Voorbeeld: in de groepsranking <…, Z, Y, X, Z, Y, X, …> die we kregen door toepassing van paarsgewijze meerderheid neemt Z meerdere posities in. Bijgevolg voldoet ook paarsgewijze meerderheid niet aan dat criterium.
- <u>Pareto</u>: als iedereen optie X beter vindt dan optie Y, dan vindt de groep dit ook.[7]
    - Voorbeeld: als Alicja, Bouchra, en Cas alle drie X boven Y verkiezen, dan verkiest de groep ook X boven Y.
- <u>Pluralisme</u>: elk mogelijk ranking-profiel is toegelaten; de stemregel sluit dus niet reeds bij voorbaat bepaalde (constellaties van) voorkeuren uit.
    - Voorbeeld: zowel Alicja, Bouchra, als Cas mogen vrij kiezen hoe ze de opties ordenen van “best” naar “slechtst”; elke ranking is op zich toegelaten
- <u>Onafhankelijkheid van Andere Opties</u>: hoe optie X zich tot optie Y verhoudt volgens de groep (dus: welke van hen de voorkeur krijgt), hangt *enkel* af van hoe X en Y in elk van de individuele rankings zich tot elkaar verhouden, dus niet van wat men over andere opties Z, Z’, etc. denkt.

[7] Dit criterium is vernoemd naar het werk van de Italiaanse econoom en filosoof Vilfredo Pareto (1848-1923).

  - Voorbeeld: of de groep Yolo verkiest boven het Zebrapark, kan niet afhangen van wat de groepsleden denken over de Xbox
- <u>Geen Dictator</u>: er is geen enkel individu A waarvoor geldt dat elke strikte voorkeur van A (voor een willekeurige optie X boven een andere willekeurige optie Y) automatisch overgenomen wordt door de groep.
  - Voorbeeld: het is niet zo dat de groep altijd de voorkeur van Alicja zal volgen.

Oefening 7

7a. Beschouw de stemregel “Dictatuur van A” van hierboven. Voldoet deze regel aan de criteria “Pluralisme”, “Pareto”, of “Consistentie”? Leg per criterium uit waarom dit (niet) zo is.

7b. Beantwoord dezelfde vraag als in 8a, maar voor de stemregel “Vaste voorkeur” voor X > Y > Z” van hierboven.

7c. Geldt “Onafhankelijkheid van Andere Opties” voor paarsgewijze meerderheid? Leg uit.

7d. Geldt “Onafhankelijkheid van Andere Opties” voor de Borda regel? Tip: Denk hierbij aan het voorbeeld dat we op het einde van afdeling 2 bespraken.

Het valt snel te zien dat sommige van deze criteria niet voldaan zijn, voor specifieke stemregels die we in Afdeling 2 zagen. Zo voldoet paarsgewijze meerderheid niet aan het criterium van Consistentie: wanneer we in een geval zitten zoals bij de Condorcet paradox, is de groepsranking niet consistent (ze bevat cirkels of herhalingen). Een analoge redenering kan je maken voor de regel paarsgewijze twee derde meerderheid (merk op dat er in ons café-voorbeeld een twee derde meerderheid is voor Z over Y, voor Y over X, en voor X over Z). Als we “paarsgewijze éénvoudige meerderheid” zouden beperken tot die gevallen waarin er geen cirkels kunnen ontstaan, dan schenden we het criterium van Pluralisme.

Ook de regel van *unanimiteit* komt in aanvaring met Consistentie. Volgend voorbeeld illustreert dit:

A: <X,Y,Z,U>

B: <Y,Z,U,X>

C: <Z,U,X,Y>

Volgens de unanimiteitsregel moet de groep Z verkiezen boven U. Echter, diezelfde regel zegt ook dat voor de groep, X en Z even goed zijn (want voor A is X beter dan Z, maar voor B en C is Z beter dan X). Tenslotte zegt de unanimiteitsregel ook dat X en U even goed zijn (zoek zelf even waarom). Maar je kan nu eenmaal geen ranking opstellen waarin Z boven U staat, maar X zowel op gelijke hoogte van Z als op gelijke hoogte van U staat.

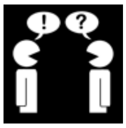
De Borda regel, tenslotte, komt in aanvaring met het criterium van Onafhankelijkheid van Andere Opties. Om dit te illustreren kunnen we een variant van het voorbeeld uit afdeling 2 voor hernemen, waarbij de verhouding tussen X en Y beïnvloedt wordt door de optie Z:

Situatie 1	**Situatie 2**
Rankings: A: <X, Y, Z> B: <X, Y, Z> C: <X, Y, Z> D: <Y, X, Z> E: <Y, X, Z>	Rankings: A: <Z, X, Y> B: <Z, X, Y> C: <Z, X, Y> D: <Y, Z, X> E: <Y, Z, X>
Groepsranking volgens Borda regel: <X, Y, Z>	Groepsranking volgens Borda regel: <Z, Y, X>

Geen van de stemregels die we tot dusver bespraken voldoet aan alle criteria die Arrow vooropstelde. Nu kan men zich afvragen: is er dan überhaupt een stemregel die aan alle vijf criteria voldoet? Om die vraag te beantwoorden zou men alle stemregels afzonderlijk kunnen gaan bekijken, maar zoals we hierboven zagen zijn er heel veel zulke stemregels. Door abstractie te maken van concrete stemregels en enkel naar hun algemene eigenschappen te kijken, was Arrow echter in staat om het volgende aan te tonen:

Arrows Theorema. Er zijn geen stemregels (voor keuzes uit minstens drie opties) die tegelijkertijd voldoen aan de vijf criteria: *consistentie, unanimiteit, pluralisme, onafhankelijkheid van andere opties, geen dictator*.

Hieruit volgt onder andere: als een stemregel aan de eerste vier criteria voldoet, dan is het een dictatoriale stemregel. Ook: als een stemregel niet dictatoriaal is, consistent is, een veelheid van diverse opinies aankan, en onafhankelijkheid van andere opties respecteert, dan is het een regel die soms een unanieme voorkeur negeert. Een voorbeeld hiervan is de regel "Vaste Voorkeur voor <X,Y,Z>" die we hierboven bespraken.



Ter discussie: Arrows theorema zegt dus dat de vijf criteria die hij vooropstelde te veeleisend zijn.

- Kunnen we dan eigenlijk wel ooit op een democratische manier keuzes maken?
- Hoe interpreteer jij Arrows theorema?
- Welk van de vijf criteria zou jij laten vallen, als je moet kiezen?

Over Arrows theorema is al heel wat inkt gevloeid, en men heeft er soms erg verregaande conclusies aan vastgehangen. Voor sommigen is het een reden om heel pessimistisch te zijn over democratie; anderen zien het minstens als een argument tegen het idee dat er zoiets zou zijn als "de wil van het volk", wat wel eens door verlichtingsfilosofen beweerd werd. In zijn recente boek *Hoera! De Democratie is Niet Perfect* omschrijft Joël de Ceulaer de situatie als volgt:

> ‘Als je puur intuïtief nadenkt over de democratie, zou je geneigd kunnen zijn te geloven dat het niet uitmaakt welk systeem je gebruikt, dat de uitkomst altijd dezelfde zou zijn: dat onze collectieve wil altijd tevoorschijn zou komen uit de optelsom van onze stembiljetten. En dat is niet zo.’

Nog anderen zien Arrows theorema als een argument om democratische beslissingen te beperken tot keuzes uit twee opties. Het minste wat men kan zeggen is dat dit theorema toont dat er niet één volmaakte manier bestaat om individuele voorkeuren te vertalen naar een groepsranking: elke stemregel zal minstens één van Arrows criteria schenden, en men moet dus de afweging maken welke van die criteria men verkiest.

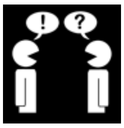
Arrows theorema is in wezen *negatief*: het zegt ons wat niet mogelijk is. Men spreekt in dit verband vaak ook van een “impossibility theorem” of “impossibility result”. Er zijn echter ook vele *positieve* resultaten in Social Choice Theory, waarbij men bijvoorbeeld aangetoond heeft dat het wel mogelijk is om aan sommige (maar niet alle) van Arrows criteria te voldoen. Een ander positief gevolg van Arrows theorema is dat het ons een soort menukaart geeft, voor het kiezen uit stemregels. Het laat ons m.a.w. toe om beter te zien wat de mogelijkheden zijn, en wat de gevolgen zijn van bepaalde stemregels.

5. Van rankings naar opinies: judgement aggregation

Argumenten voor voorkeuren

In het voorgaande lag de focus op de vertaling van individuele rankings naar een groepsranking, over een vooraf bepaalde reeks opties X, Y, Z, … . Belangrijk hierbij is dat er niet gekeken werd naar hoe die individuen hun voorkeuren motiveren, wat de achterliggende redenen zijn. We gingen er bijvoorbeeld van uit dat Alicja simpelweg het Zebrapark verkiest boven de Xbox; we hadden daarbij geen aandacht voor de specifieke *redenen* waarom ze liever het ene dan het andere doet.

Men kan zich dus de bedenking maken: is dit allemaal wel erg relevant voor hoe groepen in werkelijkheid keuzes maken? Stel dat Alicja, Bouchra, en Cas een whatsapp-groep hebben. Dan gaan ze toch niet éénvoudigweg hun voorkeuren (of zelfs een volledige ranking, zonder meer) opgeven? Ze zullen toch wel zeggen waarom ze liever op café gaan dan te gamen? En waarom zouden ze dan niet in staat zijn om hun voorkeuren te herzien, en aan te passen in functie van wat de anderen zeggen?



Ter discussie: Stel je voor dat je deelneemt aan de whatsapp-groep van Alicja, Bouchra, en Cas.

- Wat zou een reden kunnen zijn om liever naar Yolo te gaan dan op de Xbox te spelen? Gebruik hierbij je eigen fantasie…
- Wanneer zou je je voorkeur herzien? Welke informatie zou daartoe leiden? Geef een concreet voorbeeld.

Stel dat je op school jaarlijks geld inzamelt voor "De Warmste Week", en je moet dit jaar kiezen aan welk goed doel jullie het geld gaan geven. Hoe zou jij argumenteren dat het ene goede doel "beter" is dan het andere?

Er is heel wat discussie en literatuur over hoe verschillende personen keuzes kunnen maken nadat ze over hun voorkeuren overlegd hebben. Als A, B, en C bijvoorbeeld, door te praten en argumenten te geven, zou kunnen overeenkomen over wat de relevante eigenschappen zijn van een goed café, en het eens geraken welke cafés die eigenschappen hebben, dan is het helemaal niet nodig (en zelfs absurd) om hun rankings van voor de discussie te gaan "optellen".

Hoewel deze bedenking dus terecht is, moet men ook een belangrijke kanttekening maken. Immers, wie zegt dat men als groep (altijd) in staat zal zijn om het eens te geraken over argumenten, bedenkingen, eigenschappen, etc.? Waar stopt dit? Kunnen we, vertrekkende van opvattingen van de individuen in de groep, op een correcte en democratische manier bepalen wat voor de groep relevant en aannemelijk is?

Het Discursieve Dilemma

In het verlengde van Arrows theorema heeft men ontdekt dat er ook grenzen zijn aan het "aggregeren" (optellen of combineren) van opinies, en dat er vaak verschillende manieren zijn om dit te doen, die elk hun beperkingen hebben. We zullen de details van deze theorie hier niet verder uitspitten, maar illustreren wel het probleem aan de hand van een éénvoudig voorbeeld.

Stel dat café de Zwaan en café Yolo gesloten zijn. Alicja, Bouchra en Cas hebben dus eigenlijk maar één optie, nl. café Xanthyp. Maar aangezien twee van de drie niet echt warmlopen voor Xanthyp, komt nu een nieuwe optie op tafel, namelijk thuisblijven. Na lang overleg in de whatsapp-groep (en enkele GIFs) komen ze tot de consensus dat ze naar Xanthyp willen gaan, op drie voorwaarden:

(1) het café is minstens open tot 2u 's nachts
(2) men serveert ook een warme snack in het café
(3) er wordt goede muziek gedraaid in het café

De meningen zijn echter verdeeld over welk van die drie voorwaarden het geval zijn. Alicja denkt dat (1) en (2) voldaan zijn, maar (3) niet. Alicja wil dus liever thuisblijven. Bouchra denkt dat (2) en (3) voldaan zijn, maar (1) niet. Bouchra blijft dus ook liever thuis. Cas, tenslotte, denkt dat (1) en (3) voldaan zijn, maar (2) niet. Ook Cas blijft dus liever thuis.[8] We vooronderstellen bovendien dat er geen manieren zijn voor de groepsleden om uit te

[8] Merk op dat we hier impliciet vooronderstellen dat Alicja, Bouchra, en Cas inzien dat er een logische relatie is tussen enerzijds (1), (2), en (3), en anderzijds de vraag of ze al dan niet willen gaan. Dat logisch verband is hier belangrijk: als er geen zulk verband zou zijn, dan kan de groep altijd de meerderheid volgen zonder dat dit tot een tegenspraak leidt.

vissen wat nu precies het geval is en dus wie gelijk heeft. Ze kunnen met andere woorden enkel op elkaars opinie steunen om als groep te bepalen wat het geval is.

Hoe zit het dan met de groep? Laat ons opnieuw vertrekken van een éénvoudige regel, waarbij “B” staat voor een willekeurige bewering zoals “het café is open to 2 u ’s nachts” of “men serveert ook een warme snack in het café”:

> (R*) de groep gelooft dat X waar is, als de meerderheid van de leden van de groep geloven dat X waar is; in het andere geval gelooft de groep dat X niet waar is

Passen we deze regel toe op ons voorbeeld, dan gelooft de groep dat het café open is tot 2u, dat men er een warme snack serveert, en dat er goede muziek gedraaid wordt. Bijgevolg gelooft de groep dat het café aan alle drie de voorwaarden voldoet om een goed café te zijn.

bewering \ persoon	**Alicja**	**Bouchra**	**Cas**	**meerderheid**
(1) open tot 2u?	+	-	+	+
(2) warme snack?	+	+	-	+
(3) goeie muziek?	-	+	+	+
DUS: op café gaan?	-	-	-	?

Figuur 2: Het discursieve dilemma

Ter discussie: Wat moeten Alicja, Bouchra, en Cas nu doen? Moeten ze, uitgaande van regel (R*), alsnog naar Xanthyp gaan? Of moeten ze uitgaan van hun individuele opinie over het al dan niet gaan, en dus (1), (2), en (3) negeren? Welke aanpak is meer democratisch? Geef argumenten voor jouw visie op dit probleem.

Deze vraag wordt het *discursieve dilemma* genoemd (zie Figuur 2 voor een schematische weergave). Een *dilemma* is hier een situatie waarin je moet kiezen uit twee opties, maar beiden eigenlijk slecht, problematisch, of nadelig zijn. In het discursieve dilemma moet je kiezen tussen wat de meerderheid denkt over elk van (1), (2), en (3) enerzijds, en wat de meerderheid (unaniem) denkt over al dan niet op café gaan.[9]

Judgement aggregation

Wat de Condorcet paradox is voor rankings, is het discursieve dilemma voor opinies. Net zoals bij rankings, kan men voor opinies allerlei regels bedenken die verschillend zijn van de (R*) hierboven, en die bepalen wat de opinie van de groep is, in functie van de opinies van de individuen in de groep. Sommige van die regels geven wel een consistente uitkomst in ons éénvoudig voorbeeld hierboven, maar hebben dan weer andere nadelen. Net zoals bij rankings kan men zich afvragen aan welke criteria zulke regels moeten voldoen. En net zoals Arrow vaststelde voor rankings, kan men ook voor opinies aantonen

[9] De term “discursive dilemma” werd geïntroduceerd door List en Pettit (2011). Het dilemma is echter analoog aan de al eerder bekende “doctrinal paradox” die door Kornhauser (1992) geïntroduceerd werd, en het is ook nauw verwant aan de nog oudere “Ostrogorski paradox” (Rae en Daudt 1976).

dat er grenzen zijn aan het “aggregeren” van individuele opinies. De theorie hiervan noemt men *Judgement Aggregation*. Een vergelijking tussen judgement aggregation en social choice theory wordt weergegeven in de tabel op de volgende bladzijde.

Social Choice Theory	**Judgement Aggregation**
opties, alternatieven	beweringen, claims, uitspraken, inschattingen
voorkeuren: “beter”, “slechter”, “even goed”, “onvergelijkbaar”	opinies: Waar/vals, meer/minder waarschijnlijk
stemregels	Aggregatie (optellen) van opinies
Condorcet paradox	Discursieve dilemma
criteria	
Beperkingen / conflicten tussen criteria (Arrows Theorema, …)	

Laat ons kort één resultaat uit de theorie van judgement aggregation illustreren, zodat de analogie duidelijker wordt. Vertrekkend van een algemeen model van het vertalen van individuele opinies naar een “opinie van de groep”, argumenteert Christian List dat zulke vertaling nooit aan de drie volgende criteria kan voldoen:[10]

- *Pluralisme**: de vertaling kan vertrekken van alle combinaties van alle mogelijke individuele opinies, zolang die individuele opinies op zichzelf consistent zijn
- *Meerderheid**: opdat de groep bewering B aanvaardt, moet B *minstens* door een meerderheid van individuen aanvaard zijn
- *Consistentie**: de opinie van de groep is op zichzelf consistent

Elk democratisch beslissingsmechanisme zal dus noodgedwongen een keuze moeten maken, en één van deze drie principes moeten verwerpen. Dit noemt List het “democratische trilemma” (List 2011): een schijnbaar hartverscheurende keuze tussen drie opties (= het verwerpen van één van de drie criteria). Wil de groep in alle omstandigheden (dus voor elke mogelijke input van individuele opinies) consistent blijven, dan moet soms de opinie van de meerderheid terzijde geschoven worden. Wil men ten allen tijde de meerderheid respecteren en consistent zijn, dan zal men sommige constellaties van individuele opinies moeten uitsluiten. Wil men dat laatste niet, en wil men toch de meerderheid respecteren, dan zal men soms uitkomen bij een groepsopinie die zichzelf tegenspreekt.

List argumenteert echter tegelijkertijd dat dit resultaat ook iets positief met zich meebrengt: het stelt ons in staat om kritisch en systematisch na te denken over democratische beslissingsmechanismen en concrete, ogenschijnlijk “democratisch” beslissingen. Zo argumenteert men onder andere op basis van de sociale keuzetheorie dat het onzinnig is

[10] We parafraseren hier (List 2011). Net als bij Arrows theorema moet hier ook aan een extra voorwaarde voldaan zijn, namelijk dat de verzameling van beweringen waarover de groep moet oordelen (in functie van de oordelen van de individuen) een bepaalde minimale complexiteit moet bezitten, dat er bepaalde logische relaties tussen de beweringen moeten gelden. List argumenteert echter dat die extra voorwaarde zeer zwak is, en dus zeer vaak voldaan is.

om op een éénduidige manier te spreken over “de betekenis van het Brexit-referendum”, laat staan over de “wil van het volk” die door zulk referendum werd uitgedrukt.

6. Tot slot

Samenvattend kunnen we de hoofdbezigheid van Social Choice Theory als volgt omschrijven:

- SCT bestudeert diverse manieren waarop men voorkeuren of opinies van verschillende individuen kan vertalen naar “wat de groep wil” of “wat de groep denkt”, via stemregels. Er zijn immers vele manieren om die vertaling te maken, en die geven niet altijd een goede of te verwachten uitkomst. Door ze systematisch (en met wiskundige middelen) te bestuderen, krijgt men hier meer grip op.
- SCT bestudeert tegelijk ook algemene *criteria* voor hoe die vertalingen gemaakt kunnen worden. SCT houdt zich dus bezig met vragen zoals: “Wanneer is de groepsbeslissing rationeel?” “Wanneer is ze democratisch?” “Wanneer houdt ze rekening met de meerderheid?” Die vragen zijn al veel ouder dan SCT, maar de vernieuwing van SCT bestaat erin dat men ze op een exacte, mathematische manier benadert.

Het zou kort door de bocht zijn om te stellen dat SCT aantoont dat we nooit op een democratische manier beslissingen kunnen nemen, of tot een groepsopinie kunnen komen in gevallen waarin de oorspronkelijke individuele meningen divers zijn. Anderzijds kan men ook niet simpelweg de resultaten van SCT naast zich neerleggen als zijnde irrelevant voor wat we denken over democratie.

Wat SCT aantoont is dat democratische beslissingen niet zomaar op een *mechanische* manier gemaakt kunnen worden, zelfs niet als vooraf vastligt wat de opties zijn waaruit we moeten kiezen, of wat de beweringen zijn waarover de groep een mening moet vormen. Met andere woorden, we moeten voorbijgaan aan puur wiskundig bepaalde stemregels, willen we op een gefundeerde en democratische manier beslissingen nemen als groep. SCT kan dus gezien worden als een aanzet naar een *rijkere* visie op democratie, nl. democratie als een proces van *deliberatie*: mensen moeten in overleg gaan, hun meningen en argumenten uitwisselen, waar nodig hun opvattingen herzien, om zo hetzij tot een consensus te komen, hetzij op een geïnformeerde manier te bepalen hoe ze, ondanks een verschil in visie, toch als groep een beslissing kunnen nemen.

7. Oplossingen van de oefeningen

1a. Je kan dit op vele manieren beantwoorden, maar alle antwoorden komen in se op hetzelfde neer. Eén voorbeeld: Bouchra verkiest de Xbox boven de beide andere opties, en ze verkiest het Zebrapark boven café Yolo.

1b. <Z,X,Y>

2a. Hier hangt het antwoord af van de stemregel:

- Paargewijze twee derde meerderheid: je krijgt hier ook een cirkel, dus <… Z, Y, X, Z, Y, X, Z, Y, X, …>
- Eenvoudige meerderheid, unanimiteit, en Borda regel: alle opties zijn “even goed” voor de groep

2b. JA voor paarsgewijze twee derde meerderhdie; NEE voor de andere drie regels.

2c. Bij de andere stemregels zijn alle alternatieven even goed, en kan je dus ook niet zomaar een keuze maken.

3a. Hier kan je allerlei voorbeelden bedenken. We geven er één: stel dat drie vrienden moeten kiezen waar ze samen op weekend gaan: kamperen aan de Noord-Franse kust, naar een huurhuisje in Durbuy, of een airbnb in Amsterdam. Je kan deze opties afkorten als K, D, en A.

3b. Dit hangt opnieuw af van je voorbeeld. Met het voorbeeld dat we in 3a gaven kan je volgende rankings hebben: <K,D,A>, <K,A,D>, <A,K,D>, <A,D,K>, <D,K,A>, <D,A,K>. Merk op dat we hier telkens eerst één van de drie opties op de eerste plaats zetten, en dan de twee overgebleven opties wisselen van plaats in de ranking.

4a. Hier zijn veel correcte antwoorden mogelijk. We geven enkele voorbeelden van ranking-profielen in de tabel hieronder:

<X,Y,Z,U> <X,Y,Z,U> <X,Y,Z,U>	<X,Y,Z,U> <X,Y,Z,U> <X,Y,U,Z>	<X,Y,Z,U> <X,Y,U,Z> <X,Y,U,Z>
<X,Y,Z,U> <Y,X,Z,U> <X,Y,Z,U>	<Y,X,Z,U> <X,Y,Z,U> <X,Y,U,Z>	<X,Y,Z,U> <X,Y,U,Z> <X,U,Y,Z>

4b. Neen, dit is zeer éénvoudig: telkens als je bij één van de personen één van de opties van plaats verwisselt, bekom je een ander ranking-profiel. In de kolom hierboven deden we dit van links naar rechts, en van boven naar onder. Dit toont dat je heel snel aan heel veel mogelijke ranking-profielen komt, naarmate er meer opties en meer groepsleden zijn.

5a. Met twee keuze-opties, die we voor het gemak X en Y noemen, zijn er slechts 2 mogelijke rankings: <X,Y> en <Y,X>.

5b. Met drie keuze-opties zijn er 6 mogelijke rankings; zie het antwoord op vraag 3b hierboven.

5c. Met vier keuze-opties X, Y, Z, en U, zijn er 24 mogelijke rankings. Je kan dit zien door als volgt te redeneren: elk van de vier keuze-opties kunnen op de eerste plaats voorkomen. Eens je vastlegt welke optie op de eerste plaats voorkomt, heb je nog drie andere keuze-opties over, waarmee je alle 6 variaties uit vraag 5b kan vormen. Dus heb je 4 x 6 mogelijke rankings. De tabel hieronder geeft deze redenering weer.

<X, Y, Z, U>	<Y, X, Z, U>	<Z, Y, U, X>	<U, X, Y, Z>
<X, Y, U, Z>	<Y, X, U, Z>	<Z, Y, X, U>	<U, X, Z, Y>
<X, Z, Y, U>	<Y, U, X, Z>	<Z, X, U, Y>	<U, Y, X, Z>
<X, Z, U, Y>	<Y, U, Z, X>	<Z, X, Y, U>	<U, Y, Z, X>
<X, U, Y, Z>	<Y, Z, X, U>	<Z, U, X, Y>	<U, Z, X, Y>
<X, U, Z, Y>	<Y, Z, U, X>	<Z, U, Y, X>	<U, Z, Y, X>

5d. Als je *n* keuze-opties hebt, dan zijn er

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

mogelijke rankings. Immers, op plaats 1 in de ranking kan je *n* verschillende opties zetten. Eens je dat deed, dan kan je op plaats 2 nog *(n-1)* verschillende opties zetten. Daarna kan je op plaats 3 nog *(n-2)* verschillende opties zetten. Etc, tot er enkel nog de laatste plaats overblijft, en dan heb je nog slechts 1 optie over. Het product hierboven wordt de faculteit van *n* genoemd, en afgekort met *!n*.

5e. Als er *k* mogelijke rankings zijn en *m* individuele groepsleden, dan zijn er *k x m* mogelijke ranking-profielen. Immers, elk lid van de groep kan elke mogelijke ranking hebben.

6a. Een stemregel bekom je door, voor elk ranking-profiel vast te leggen wat de overeenkomstige groepsranking (volgens die stemregel) is. Als er n mogelijke ranking-profielen zijn, en m mogelijke rankings, dan zijn er dus *n x m* mogelijke stemregels.

6b. Als er *4* alternatieven zijn, dan betekent dit dat er *24* mogelijke rankings zijn (zie oefening 5c). Als er bovendien *5* groepsleden zijn, dan volgt hieruit dat er *5 x 24 = 120* mogelijke ranking-profielen zijn (zie oefening 5e). Het aantal mogelijke stemregels komt dan op *120 x 24 = 2880* (zie oefening 6a).

7a. De regel "Dictatuur van A" voldoet aan alle drie de criteria:

- Pluralisme: hoewel er geen rekening gehouden wordt met de voorkeuren van anderen in de bepaling van de groepsranking, mogen ze gelijk welke voorkeur hebben
- Pareto: Als iedereen optie X beter vindt dan optie Y, dan geldt dat ook voor de dictator A. Dus zal ook de groep X beter vinden dan Y.
- Consistentie: zolang de ranking van de dictator consistent is, is de groepsranking dat ook.

7b. “Vaste voorkeur” voldoet aan pluralisme (om dezelfde reden als “Dictatuur van A”, zie oefening 7a). Deze regel voldoet niet aan Pareto, aangezien het best mogelijk is dat de vaste voorkeur afwijkt van wat iedereen vindt. De regel voldoet wel aan consistentie, zolang de vaste voorkeur zelf consistent is.

7c. “Onafhankelijkheid van Andere Opties” geldt voor paarsgewijze meerderheid, aangezien de voorkeuren tussen twee opties X en Y enkel afhangen van wat elk van de groepsleden over X en Y denken (en dus niet van andere opties).

7d. ”Onafhankelijkheid van Andere Opties” geldt niet voor de Borda regel. Dit wordt verderop, volgend op oefening 7, in de tekst uitgelegd.

8. Geciteerde bronnen

Arrow (1951). Kenneth J. Arrow, 1951/1963, *Social Choice and Individual Values.* New York: Wiley.

Black (1948). Duncan Black, “On the Rationale of Group Decision-Making.” *Journal of Political Economy*, Vol. 56 (1948), pp. 23–34.

De Ceulaer (2019). Joël De Ceulaer, *Hoera! De democratie is niet perfect: Verdediging van een onvolmaakt system.* Antwerpen: Lannoo, 2020.

Estlund (1994). David M. Estlund, “Opinion leaders, independence, and Condorcet's Jury Theorem”, *Theory and Decision*, Vol. 36 (1994), pp. 131–162.

Kornhauser (1992). L. A. Kornhauser, “Modeling collegial courts II: Legal doctrine”, *Journal of Law, Economics and Organization* Vol. 8 No. 3 (1992), pp. 441-470.

List (2011). Christian List, “The Logical Space of Democracy”, *Philosophy & Public Affairs,* Vol. 39, No. 3 (2011), pp. 262-297.

List (2013). Christian List, "Social Choice Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.). URL: https://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/social-choice/

List en Pettit (2011). Christian List and Philip Pettit, 2011, *Group Agency: The Possibility, Design, and Status of Corporate Agents*. Oxford: Oxford University Press.

Rae en Daudt (1976). D. W. Rae en H. Daudt, “The Ostrogorski paradox: a peculiarity of compound majority decision”, *European Journal of Political Research*, Vol. 4 No. 4 (1976), pp. 391-398.